第４章　産業連関表に関連する数学知識

１ 行列

（１）スカラー・行列・ベクトル

日常生活において、数の計算をする場合は、

$$1000+2+30 = 1032$$
$$100\times 40\div 5 = 800$$

といったように、1 つの数字（「1000」、「2」、「3」等）同士の加減乗除を行う場合が多いと思います。この「1」、「2」、「30」、「1032」、「100」、「40」のような単一の数字をスカラーと呼んでいます。（普通の数字のことだと思ってください。）

これに対して､複数の数字同士を処理する数学上の手法として行列計算というものがあります。では、行列とは、どのようなものを指すのかを見てください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 80 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}、\quad \begin{pmatrix} 100 & 50 & 21 \\ 2 & 39 & 5 \end{pmatrix}、\quad \begin{pmatrix} 4 & 90 \\ 67 & 1 \\ 3 & 32 \end{pmatrix}$$

このような複数の数字を縦横に並べて括弧で囲んだものを行列と言います。

上にあるものは、3 つの行列で、左から順に 2 行 2 列の行列（または 2×2 行列）、2 行 3 列の行列（または 2×3 行列）、3 行 2 列の行列（または 3×2 行列）といいます。

一般的には、次のように表されます。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{第１列} & \text{第２列} & & & \text{第n列} \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{第１行} \rightarrow \\ \text{第２行} \rightarrow \\ \\ \\ \text{第m行} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

「ａ$_{11}$」、「ａ$_{12}$」等の行列を構成している１つ１つの数字を行列「要素」（または「成分」）といいます。

また、行列を表記する場合、これまでの例のようにその行列の全要素を表記することもありますが､「行列Ａ」などとローマ字の大文字を用いて簡略化して表記することが多くあります。

なお、行と列のどちらかが１つであるものを「ベクトル」といいます。

具体的には、

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 3 \end{pmatrix}$$

などです。

そして、左側のものを行ベクトルといい、右側のものを列ベクトルといいます。

（２）行列の加減算

同じ型の行列同士の場合のみ、行列の足し算や引き算ができます。

例えば、

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+10 & 1+4 \\ 2+3 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 & 4-9 & 5-8 \\ 1-3 & 3-2 & 12-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

というようになります。つまり、同じ位置同士の要素を加減するということです。

なので、繰り返しになりますが、同じ型の行列同士でないと、加減する相手方の要素がないため計算できないことになります。

そして、同じ型の行列である限り、行列Ａ、行列Ｂ、行列Ｃの間には、以下の法則が成立します。

交換法則	Ａ＋Ｂ	＝	Ｂ＋Ａ
結合法則	Ａ＋（Ｂ＋Ｃ）	＝	（Ａ＋Ｂ）＋Ｃ

（３）スカラー×行列

スカラーと行列の乗算は、行列の各要素をスカラー倍することになります。例えば、

$$3\times\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times5 & 3\times1 & 3\times9 \\ 3\times2 & 3\times2 & 3\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 27 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

というようになります。

スカラーと行列の乗算の場合も、加減算と同様に交換法則、結合法則がともに成立し、さらに分配法則も成立します。

ｍ、ｎをスカラーとし、Ａ、Ｂを行列とすると、以下の関係が成立します。

交換法則	ｍＡ	＝	Ａｍ
結合法則	（ｍｎ）Ａ	＝	ｍ（ｎＡ）
分配法則 ①	ｍ（Ａ＋Ｂ）	＝	ｍＡ＋ｍＢ
分配法則 ②	（ｍ＋ｎ）Ａ	＝	ｍＡ＋ｎＡ

（４） 行列×行列

行列同士の乗算は、かけられる行列（左側）の列の数とかける行列（右側）の行の数が等しい場合に可能です。

その結果（積）の行列は、かけられる行列（左側）の行の数とかける行列（右側）の列の数の行列になります。

掛け算の答えは、外側の行と列

（2×3 行列） × （3×1 行列）

内側が同じだと掛け算できる

例えば、上の例では、左側の列数（3）と右側の行数（3）が同じなので、乗算が可能です。

また、その答となる行列は、左側の行数（2）と右側の列数（1）となりますので、（2×1 行列）になります。

では、次に乗算の方法です。

例えば、つぎのようにします。

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5\times10)+(8\times3) & (5\times4)+(8\times8) \\ (2\times10)+(4\times3) & (2\times4)+(4\times8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 84 \\ 32 & 40 \end{pmatrix}$$

左側の行列の行の各要素と右側の行列の列の同じ順番の要素をそれぞれ掛けて、足していっています。一つずつ行うと次のようになります。

まず、答えとなる行列の１行１列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(5\times10)+(8\times3)} & (5\times4)+(8\times8) \\ (2\times10)+(4\times3) & (2\times4)+(4\times8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{74} & 84 \\ 32 & 40 \end{pmatrix}$$

次に、答えとなる行列の１行２列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix}5&8\\2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10&4\\3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(5\times10)+(8\times3)&\boxed{(5\times4)+(8\times8)}\\(2\times10)+(4\times3)&(2\times4)+(4\times8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}74&\boxed{84}\\32&40\end{pmatrix}$$

次に、答えとなる行列の２行１列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix}5&8\\2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10&4\\3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(5\times10)+(8\times3)&(5\times4)+(8\times8)\\\boxed{(2\times10)+(4\times3)}&(2\times4)+(4\times8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}74&84\\\boxed{32}&40\end{pmatrix}$$

最後に、答えとなる行列の２行２列の要素を計算します。

$$\begin{pmatrix}5&8\\2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10&4\\3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(5\times10)+(8\times3)&(5\times4)+(8\times8)\\(2\times10)+(4\times3)&\boxed{(2\times4)+(4\times8)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}74&84\\32&\boxed{40}\end{pmatrix}$$

もちろん、計算の順番は自由ですが、答えとなる行列の形を考えてから、その各要素を計算するには、左側の行列のどの行と右側の行列のどの列の各要素を掛けて足し挙げればよいかを考えるとよいでしょう。

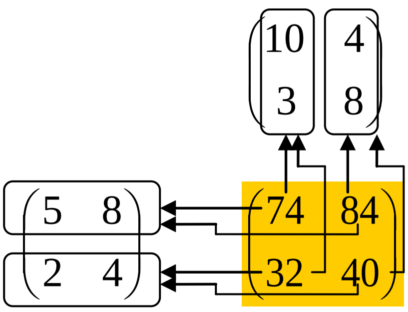
上の例の答と計算の関係をまとめると次のようになります。

まず、答えは、（2×2 行列）×（2×2 行列）なので、外側の（2×2 行列）になります。

計算方法は、

（答の１行１列）＝（左側の行列の１行目各要素）×（右側の行列の１列目各要素）の合計
（答の１行２列）＝（左側の行列の１行目各要素）×（右側の行列の２列目各要素）の合計
（答の２行１列）＝（左側の行列の２行目各要素）×（右側の行列の１列目各要素）の合計
（答の２行２列）＝（左側の行列の２行目各要素）×（右側の行列の２列目各要素）の合計

これをイメージで表すと次のようになります。網掛けの答の行列の各要素が、元の行列のどの行と列を使って計算したかを示しています。



答の各要素に対応した左側の行列の行の各要素と右側の行列の列の各要素同士が掛け合わされて足されていることが分かります。

行列の乗算では、掛けられる方と掛ける方の順番が変わると、特別な場合を除いて答が異なります。（交換法則が成立しない）

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5\times10)+(8\times3) & (5\times4)+(8\times8) \\ (2\times10)+(4\times3) & (2\times4)+(4\times8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 84 \\ 32 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (10\times5)+(4\times2) & (10\times8)+(4\times4) \\ (3\times5)+(8\times2) & (3\times8)+(8\times4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 96 \\ 31 & 56 \end{pmatrix}$$

また、逆にすると計算自体ができなくなることもあります。
例えば、
（2×3）×（3×4）は、内側の数字が同じなので計算ができますが、
これを入れ替えて
（3×4）×（2×3）にすると、左側の列数（4）と右側の行数（2）が違ってしまいますので、計算自体ができなくなります。

このようなことを踏まえて考えると、行列の乗算では次の法則が成立します。

結合法則　（ＡＢ）Ｃ　＝　Ａ（ＢＣ）

分配法則
① Ａ（Ｂ＋Ｃ）　＝　ＡＢ＋ＡＣ
② （Ａ＋Ｂ）Ｃ　＝　ＡＣ＋ＢＣ

２　特殊な行列

行列の中には、その形や含まれる要素、元の行列との関係から、名前がつけられたものがありますので、それらを紹介します。

（１）正方行列

行と列の数が等しい行列（2×2 行列、3×3 行列等）を正方行列といいます。正方行列には、特別な名称を付された行列があります。

（ア） 対角行列

行列の左上から右下にいたる、行列の対角線上の要素（対角要素）以外がすべて 0 である行列を、対角行列といいます（対角線上の要素に 0 があっても対角行列です）。

具体例としては、次のようなものがあります。

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

産業連関分析では、ベクトルを対角行列化（対角行列にすること）して計算を行なうことがあります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

これには、幾つかの利点があります。

その一つとしては、対角化によって、対角行列化後の形と同じ行列と加減算ができるということです。

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & -4 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

次に、対角行列化した行列は、左から掛けると、行ベクトルを掛けたのと同じような計算ができるという利点があげられます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 111 & 65 & 66 \end{pmatrix}$$

縦に合計すると一致

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 6 & 9 & 15 & 18 \\ 49 & 14 & 21 & 35 \\ 90 & 80 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

同様に、対角行列化した行列は、右から掛けると、列ベクトルを掛けたのと同じような計算ができるという利点があります。

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 106 \\ 84 \\ 57 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 24 & 63 & 30 \\ 2 & 9 & 35 & 60 \\ 7 & 6 & 21 & 50 \\ 9 & 24 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

横に合計すると一致

（イ） 単位行列

対角行列のうち、左上から右下にいたる対角線上の要素がすべて１である行列を単位行列といい、「Ｉ」と表します。

単位行列Ｉの重要な性質としては、単位行列Ｉにどのような行列Ａを乗じても、その乗じた結果は行列Ａと等しくなる、つまり、ＡＩ＝Ａが成立することが挙げられます。

スカラーの数字に「1」を掛けても元の数字のままであるのと似ています。

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

また、Ｉは、どちらから掛けても結果は同じです。

つまり、

ＡＩ＝ＩＡ＝Ａ　　となります。

（ウ） 転置行列

行列の行と列を入れ替えた行列を転置行列といいます。行列Ａの転置行列は、通常「Ａ’」（Ａプライム）と表します。例えば、

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

とすると、その転置行列は、

$$\mathrm{A'}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

となります。

産業連関分析では、価格分析を行なう際に使用します。

※転置行列は、ＡｔやＡＴと表示されることもあります。

（２）逆行列

行列Ａに、ある行列Ｂを乗じた場合、その積が単位行列Ｉとなるような行列Ｂを行列Ａの逆行列といいます。通常「A^{-1}」と表します。

この逆行列は、Ａが正方行列の場合のみ存在し、Ａと同じ型（行と列の数が同じ）になります。

また、逆行列は、右側から掛けても左側から掛けても、その積は単位行列Ｉとなります。

式で書くと、ＡＢ＝ＩかつＢＡ＝Ｉとなるような行列Ｂのことです。

このことから分かりますように、行列Ａの逆行列がＢだとすると、行列Ｂの逆行列は行列Ａということになります。

では、この性質を使って、逆行列を求めてみましょう。

行列　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$　　逆行列　$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=A^{-1}$　　単位行列　$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

として、行列Ａの逆行列Ｂを求めます。

ＡＢ＝Ｉとなりますので、

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1\times a)+(2\times c) & (1\times b)+(2\times d)\\ (3\times a)+(4\times c) & (3\times b)+(4\times d)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

それぞれの要素を取り出してみると、

a + 2c = 1　･･･①
b + 2d = 0　･･･②
3a + 4c = 0　･･･③
3b + 4d = 1　･･･④

③－①×2 より、
（3a + 4c）－（a + 2c）×2＝a＝0－1×2＝-2
a=-2 を①に代入して、
-2+ 2c = 1
2c=3　　　　c=1.5
④－②×2 より、
（3b + 4d）－（b + 2d）×2＝b＝1－0×2＝1
b=1 を②に代入して、
1+2d = 0
2d=-1　　　　d=-0.5

つまり、

$$\textbf{逆行列}\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}=A^{-1}$$

となります。

念のため検算をしてみると、

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となり、逆行列が求められていることが確認できます。

一般的に、行列Ｂの逆行列は、

$$B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

例の行列で計算してみると、

$$B^{-1}=\frac{1}{(-2\times-0.5)-(1\times1.5)}\begin{pmatrix}-0.5 & -1\\ -1.5 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-0.5}\begin{pmatrix}-0.5 & -1\\ -1.5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=A$$

というふうになり、Ｂの逆行列Ａが求められます。

逆行列を使うと、連立一次方程式の解が求められます。
例えば、次のような連立一次方程式があるとします。

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases}$$

この方程式を、行列を使って書くと、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　逆行列　$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = A^{-1}$

なので、両辺に逆行列Ｂを左から掛けると、

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

となり、ｘ＝20、ｙ＝-5　という解が求められます。

産業連関分析においても、このような関係を用いて、経済波及効果を求めています。

３ 産業連関分析への行列の利用

（１）移輸出入を考慮しない均衡産出高モデル（競争移輸入型、閉鎖型）

まず産業を 2 部門に限定して、県外との財・サービスの取引分（移輸出入分）も県内での生産によって賄っていると想定した経済（移輸出入を考慮しない経済）の産業連関表を用いて説明します。

移輸出入を考慮しないモデル

		中間需要		最終	
		産業Ⅰ	産業Ⅱ	需要	県内生産額
中間投入	産業Ⅰ	10	20	70	100
	産業Ⅱ	40	40	120	200
粗付加価値		50	140		
県内生産額		100	200		

この産業連関表の投入係数表を作成すると、次のようになります。

投入係数表

	産業Ⅰ	産業Ⅱ
産業Ⅰ	0.1	0.1
産業Ⅱ	0.4	0.2

ここで、この投入係数表を行列に見立て、行列Ａとすると、次のように表せます。

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

最終需要部門とその右の県内生産額をそれぞれ行列で表すとそれぞれ、次のようになります。

$$\text{最終需要F} = \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \end{pmatrix} \qquad \text{県内生産額X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

また、産業連関表の部門を横に見ると、その関係は、次のように表せます。

産業Ⅰ　　10＋20＋　70＝100

産業Ⅱ　　40＋40＋ 120＝200

この関係を行列で表すと次のように表せます。

$$\begin{pmatrix} 10+20+70 \\ 40+40+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

ＡＸ　　＋　Ｆ　＝　Ｘ

この式を変形しますと、

Ｆ	＝Ｘ－ＡＸ	ＡＸを右辺に移します。
Ｘ－ＡＸ	＝Ｆ	左辺と右辺を入れ替えます。
ＩＸ－ＡＸ	＝Ｆ	ＸをＩＸにします。（ＩＸ＝Ｘ）
（Ｉ－Ａ）Ｘ	＝Ｆ	Ｘでくくります。
$(I-A)^{-1}(I-A)X$	$=(I-A)^{-1}F$	両辺に$(I-A)^{-1}$を左から掛けます。
ＩＸ	$=(I-A)^{-1}F$	
Ｘ	$\mathbf{=(I-A)^{-1}F}$	

このことは、最終需要Ｆに、$(I-A)^{-1}$を左から掛けると、生産額Ｘが求められることを示しています。

つまり、最終需要Ｆが分かれば、そこから究極的に誘発される生産額を求めることができます。

また、これは、繰り返しの波及と同じことを示しています。

繰り返しの波及は、行列を使って、

$X=F+AF+A^2F+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+A^\infty F$

と表せます。

これを変形していくと、

$(I+A+A^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+A^\infty)F$

$=I(I+A+A^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+A^\infty)F$

$=(I-A)^{-1}(I-A)(I+A+A^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+A^\infty)F$

$=(I-A)^{-1}(I-A^{\infty+1})F$　　　　　※$A^{\infty+1}\to 0$

$=(I-A)^{-1}IF$

$=(I-A)^{-1}F$

となり、同じ結果になります。

このことからも、最終需要Ｆが分かれば、そこから究極的に誘発される生産額を求めることができることが分かります。

では、実際に計算をやってみましょう。

まず、（Ｉ－Ａ）を求めます。

$$\mathrm{I}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.4 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9 & -0.1\\ -0.4 & 0.8\end{pmatrix}$$

次に、（Ｉ－Ａ）$^{-1}$を求めます。

$$(\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}=\begin{pmatrix}0.9 & -0.1\\ -0.4 & 0.8\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1.176 & 0.147\\ 0.588 & 1.324\end{pmatrix}$$

この場合は、2 行 2 列しかないので、公式でも求められますが、実際の産業連関分析では、表がかなり大きくなりますので、公表されているものを使うか、パソコンで計算を行なってください。

最終需要Ｆに掛けます。

$$(\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{F}=\begin{pmatrix}0.9 & -0.1\\ -0.4 & 0.8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}70\\ 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}99.96\\ 200.94\end{pmatrix}\fallingdotseq\begin{pmatrix}100\\ 200\end{pmatrix}=\mathrm{X}$$

このように、実際の計算上も、成り立っていることが分かります。

（２）移輸出入を考慮した均衡産出高モデル（競争移輸入型、開放型）

次に県内の需要のうち一部は県外からの移輸入によって賄われるとしたモデルを考えてみます。実際の分析には、こちらのモデルが通常使われます。

県内需要

移輸出入を考慮したモデル

		中間需要		最終需要			
		産業Ⅰ	産業Ⅱ	県内最終需要	移輸出	移輸入	県内生産額
中間投入	産業Ⅰ	10	20	90	10	-30	100
	産業Ⅱ	40	40	120	10	-10	200
粗付加価値		50	140				
県内生産額		100	200				

このモデルでは、県内需要のうちどれくらいの割合が、県内の生産物で賄われるかの比率を求めなければなりません。

これは、次のようにして求めます。まず、移輸入率を求めます。

$$\text{移輸入率}(\mathrm{m})=\frac{\text{移輸入額の絶対値}}{\text{中間需要}+\text{県内最終需要}}=\frac{\text{移輸入額の絶対値}}{\text{県内需要}}$$

この式に基づいて、上の産業連関表の移輸入率を求めると、次のようになります。

$$\text{産業Ⅰの移輸入率}(\mathrm{m}_1)=\frac{30}{10+20+90}=\frac{30}{120}=0.25$$

$$\text{産業Ⅱの移輸入率}(\mathrm{m}_2)=\frac{10}{40+40+120}=\frac{10}{200}=0.05$$

移輸入率には、次のような前提をおいて考えています。

① 同じ産業については、中間需要の各部門や最終需要の各部門で一定である。

② 移輸出のために移輸入することは想定していない。

（このことから、移輸入率の分母には、移輸出は含まれない。）

次に、自給率を考えます。自給率は、県内の需要を賄うために県内から供給されたものの比率ですので、1から移輸入率を引いたものになります。自給率は、γ（ガンマ）で表されます。

$$\text{産業Ⅰの自給率}(\gamma_1) = 1 - m_1 = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$\text{産業Ⅱの自給率}(\gamma_2) = 1 - m_2 = 1 - 0.05 = 0.95$$

ここで、産業連関表の部門を横に見ると、その関係は、次のように表せます。

産業Ⅰ　(10-0.25×10)+ (20-0.25×20)+ (90-0.25×90) +10=100
産業Ⅱ　(40-0.05×40)+ (40-0.05×40)+ (120-0.05×120)+10=200

次に、需要の各部門を行列に見立てて考えます。

$$\text{中間需要}AX = \begin{pmatrix} 10+20 \\ 40+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\text{県内最終需要}F_D = \begin{pmatrix} 90 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\text{移輸出}\quad E = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

また、移輸入率と自給率は対角化しておきます。

$$\text{移輸入率}\overline{M} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \qquad \text{自給率}\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{pmatrix}$$

これらを使って行列で表すと、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 10+20 \\ 40+40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10+20 \\ 40+40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 \\ 120 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{AX} - \overline{\mathbf{M}} \times \mathbf{AX}\right) + \left(\mathbf{F_D} - \overline{\mathbf{M}} \times \mathbf{F_D}\right) + \mathbf{E} = \mathbf{X}$$

$$\left(I - \overline{M}\right) AX + \left(I - \overline{M}\right) F_D + E = X$$

$$X - \left(I - \overline{M}\right) AX = \left(I - \overline{M}\right) F_D + E$$

$$\left\{I - \left(I - \overline{M}\right) A\right\} X = \left(I - \overline{M}\right) F_D + E$$

$$X = \left\{I - \left(I - \overline{M}\right) A\right\}^{-1} \left\{\left(I - \overline{M}\right) F_D + E\right\}$$

$$X = \left\{I - \overline{\Gamma} A\right\}^{-1} \left\{\overline{\Gamma} F_D + E\right\}$$

実際に計算してみます。

$$\mathrm{I}-\overline{\mathrm{M}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.25 & 0\\ 0 & 0.05\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.75 & 0\\ 0 & 0.95\end{pmatrix}=\overline{\Gamma}$$

$$\left(\mathrm{I}-\overline{\mathrm{M}}\right)\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0.75 & 0\\ 0 & 0.95\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.4 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.075 & 0.075\\ 0.38 & 0.19\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}-\left(\mathrm{I}-\overline{\mathrm{M}}\right)\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.075 & 0.075\\ 0.38 & 0.19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.925 & -0.075\\ -0.38 & 0.81\end{pmatrix}$$

$$\left\{\mathrm{I}-\left(\mathrm{I}-\overline{\mathrm{M}}\right)\mathrm{A}\right\}^{-1}=\begin{pmatrix}0.925 & -0.075\\ -0.38 & 0.81\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1.124 & 0.104\\ 0.527 & 1.283\end{pmatrix}$$

$$\left(\mathrm{I}-\overline{\mathrm{M}}\right)\mathrm{F_D}+\mathrm{E}=\begin{pmatrix}0.75 & 0\\ 0 & 0.95\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}90\\ 120\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}77.5\\ 124\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{X}&=\left\{\mathrm{I}-\left(\mathrm{I}-\overline{\mathrm{M}}\right)\mathrm{A}\right\}^{-1}\left\{\left(\mathrm{I}-\overline{\mathrm{M}}\right)\mathrm{F_D}+\mathrm{E}\right\}\\&=\begin{pmatrix}1.124 & 0.104\\ 0.527 & 1.283\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}77.5\\ 124\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100.006\\ 199.935\end{pmatrix}\fallingdotseq\begin{pmatrix}100\\ 200\end{pmatrix}\end{aligned}$$

このように、実際の計算上も、成り立っていることが分かります。

（３）生産額が変化した場合の均衡産出高モデル（競争移輸入型、開放型）

これまでの分析は、最終需要が変化した場合を取り扱いましたが、工場が進出した場合や工場の稼働を拡大した場合など、生産額自体が変化する場合があります。このような場合に、生産額の増加分を需要の増加分のように扱うと、自給率の関係で波及が生産額の変化分より小さくなったりして分析がうまくできません。

そこで、生産額の増加分に対する原材料需要を外生的に与えたり、部門自体を外生化したりして分析を行ないます。

（ア）原材料需要を最終需要とする場合

生産額が変化した場合は、その変化額自体が直接効果となります。そこで、その変化額をその部門に対応する投入係数で割り振ったものを最終需要として与える方法です。

これは、変化額自体を直接効果額として、逆行列係数を乗じることと同じです。

そこで、生産額変化額＝直接効果額＝ＸＤとすると、

（閉鎖型）　直接効果＋第１次間接効果＝$(I - A)^{-1} X_D$

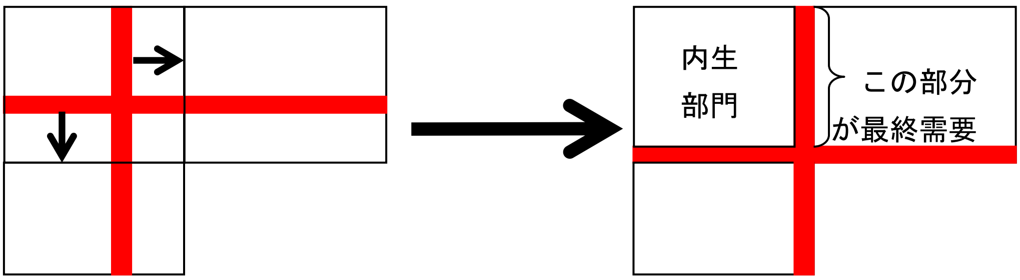
（開放型）　直接効果＋第１次間接効果＝$\{I - (I - M)A\}^{-1} X_D$

によって、直接効果＋第１次間接効果が求められることになります。

（イ）部門を外生化する場合

（ア）のような方法をとると、さらに自部門への生産波及がある場合があり、生産額の増加以上に波及効果を算出してしまうような場合があります。自部門の生産変化が、自部門に投入される部品等の需要を含んでおり、自部門の生産をさらに拡大しない場合や生産額が変化した場合の他部門への影響のみを把握したい場合は、その部門を外生化して計算を行ないます。

イメージは、下のようになります。



生産額が変化した部門を行列ともに、外生部門へ移します。移動する部門が１部門であれば、内生部門が１部門減ります。外生部門へ移した列のうち、自部門以外の産業部門が最終需要の変化額となります。後は、通常の均衡産出高モデルの計算を行ないます。また、2 次波及は外生化しないで行ないます。

外生化する部門が１部門のみであれば、逆行列係数表の外生化する部門の列の各数字をその列の自部門の数字で割った逆行列係数表を使えば、同じ結果が計算できます。

（４）均衡価格モデル（移輸入を考慮しない場合）

均衡産出高モデルは、産業連関表の横（行）方向のバランスを用いた分析ですが、均衡価格モデルでは、縦（列）方向のバランスを用いたものです。

その特徴としては、価格波及がコストプッシュ型（ある商品の価格を構成する一部の投入物の価格変化が、次々と他の商品の価格を変化させる。）であることを前提としています。また、すべての品目の価格を擬制的にとらえた円価値単位という概念を用いることで、粗付加価値率の変化による価格波及効果を求める分析といえます。

（ア）円価値単位

均衡価格モデルでは、仮想的な物量単位の数量を擬制的に設定する必要があります。そこで、１円で購入できる仮想的な数量を設定します。これを円価値単位といいます。

例えば、次のような産業連関表があったとします。

		中間需要		最終	
		産業Ⅰ	産業Ⅱ	需要	県内生産額
中間投入	産業Ⅰ	10	20	70	100
	産業Ⅱ	40	40	120	200
粗付加価値		50	140		
県内生産額		100	200		

投入構造（縦の列）を、産業Ⅰで見ると、次のようになっています。

（産業Ⅰ）

産業Ⅰから	（産業Ⅰの製品価格）	×（数　量(t)）	＝	10（円・ｔ）
産業Ⅱから	（産業Ⅱの製品価格）	×（数　量(個)）	＝	40（円・個）
粗付加価値	（賃金等の価格）	×（人数等(人)）	＝	50（円・人）
合　計	（産業Ⅰの製品価格）	×（数　量(t)）	＝	100（円・ｔ）

しかし、この情報では、価格も数量も分かりません。そこで、１円当たりの数量という仮想的な数量（円価値単位）を導入します。そうすると、次のようになります。

（産業Ⅰ）

産業Ⅰから	（1円）×（円価値単位＝　10）	＝	10（円・円価値単位）
産業Ⅱから	（1円）×（円価値単位＝　40）	＝	40（円・円価値単位）
粗付加価値	（1円）×（円価値単位＝　50）	＝	50（円・円価値単位）
合　計	（1円）×（円価値単位＝ 100）	＝	100（円・円価値単位）

このように考えると、産業連関表は、金額ではなく、円価値単位という「量」を表していることになります。つまり、この円価値単位というのは、産業連関表全体に共通する物量単位ということであり、すべてに交換可能な物量ということになります。その代表的なものは、お金です。とすれば、円価値単位当たりの産業連関表は、円という物量で表示した表ということになります。これは単位が変わったと仮想しているにすぎないので、表の数字はまったく変わりません。

しかし、物量表示の表と考えることができることから、現在、円価値単位当たり１円の価格が変化した場合の価格の影響を試算することができます。

まず、物量表示の投入係数を求めます。これは、均衡産出高モデルの投入係数の求め方と同様であり、数字自体は同じであるので、まったく同じものとなります。

投入係数表

	産業Ⅰ	産業Ⅱ
産業Ⅰ	0.1	0.1
産業Ⅱ	0.4	0.2
粗付加価値	0.5	0.7
生産額	1.0	1.0

産業Ⅰの価格をP_1、産業Ⅱの価格をP_2、粗付加価値の価格をV_1（産業Ⅰ）、V_2（産業Ⅱ）とし、投入係数（物量）×単価で表示すると、次のようになります。

産業Ⅰ　　$0.1 \times P_1 + 0.4 \times P_2 + 0.5 \times V_1 = 1.0P_1$

産業Ⅱ　　$0.1 \times P_1 + 0.2 \times P_2 + 0.7 \times V_2 = 1.0P_2$

これを行列で表示すると、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5V_1 \\ 0.7V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

一番左の行列は、投入係数行列（Ａ）の行と列を入れ替えた行列（転置行列）であることが分かります。このＡの転置行列を、「Ａ’」とし、価格ベクトルと粗付加価値ベクトルを次のとおりとします。

$$A' = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0.5V_1 \\ 0.7V_2 \end{pmatrix}$$

すると、

$$A' \times P + V = P$$
$$V = P - A'P$$
$$V = (I - A')P$$
$$(I - A')^{-1}V = (I - A')^{-1}(I - A')P$$
$$(I - A')^{-1}V = P$$

となり、Ｖ（変化率）が分かれば、価格の変化率が求められることになります。

（５）均衡価格モデル（国産品価格と輸入品価格を区別する場合）

前項で、均衡価格モデルの説明をしましたが、国産品の価格と輸入品の価格は異なっていることもあり、その変化率も同じではありません。そこで、国産品と輸入品の価格を区別して分析する場合を考えてみます。

産業Ⅰの国産品価格をP_{d1}、輸入品価格をP_{m1}、自給率をγ_1、輸入率をm_1、産業Ⅱの国産品価格をP_{d2}、輸入品価格をP_{m2}、自給率をγ_2、輸入率をm_2、粗付加価値の価格をV_1（産業Ⅰ）、V_2（産業Ⅱ）、産業Ⅰの投入係数（物量）×単価で表示すると、次のようになります。

※$\gamma_1+m_1=1$、$\gamma_2+m_2=1$

産業Ⅰ　$(0.1\times\gamma_1\times P_{d1}+0.1\times m_1\times P_{m1})$
$+(0.4\times\gamma_2\times P_{d2}+0.4\times m_2\times P_{m2})+0.5\times V_1=1.0P_{d1}$

産業Ⅱ　$(0.1\times\gamma_1\times P_{d1}+0.1\times m_1\times P_{m1})$
$+(0.2\times\gamma_2\times P_{d2}+0.2\times m_2\times P_{m2})+0.7\times V_1=1.0P_{d2}$

ここで、

$$A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\0.4 & 0.2\end{pmatrix}\qquad \overline{\Gamma}=\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\0 & \gamma_2\end{pmatrix}\qquad \overline{M}=\begin{pmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{pmatrix}$$

$$P_d=\begin{pmatrix}P_{d1}\\P_{d2}\end{pmatrix}\qquad P_m=\begin{pmatrix}P_{m1}\\P_{m2}\end{pmatrix}\qquad V=\begin{pmatrix}0.5V_1\\0.7V_2\end{pmatrix}$$

とすると、

国産品の投入は、

$$\left(\overline{\Gamma}A\right)^T P_d=\left\{\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\0 & \gamma_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\0.4 & 0.2\end{pmatrix}\right\}^T\times\begin{pmatrix}P_{d1}\\P_{d2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1\gamma_1P_{d1}+0.4\gamma_2P_{d2}\\0.1\gamma_1P_{d1}+0.2\gamma_2P_{d2}\end{pmatrix}$$

輸入品投入は、

$$\left(\overline{M}A\right)^T P_m=\left\{\begin{pmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\0.4 & 0.2\end{pmatrix}\right\}^T\times\begin{pmatrix}P_{m1}\\P_{m2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1m_1P_{m1}+0.4m_2P_{m2}\\0.1m_1P_{m1}+0.2m_2P_{m2}\end{pmatrix}$$

で表されます。

まとめますと、$\left(\overline{\Gamma}A\right)^T P_d+\left(\overline{M}A\right)^T P_m+V=P_d$

$$\left(\overline{M}A\right)^T P_m+V=\left(I-\left(\overline{\Gamma}A\right)^T\right)P_d$$

$$\left\{I-\left(\overline{\Gamma}A\right)^T\right\}^{-1}\left\{\left(\overline{M}A\right)^T P_m+V\right\}=P_d$$

$$\left[I-\left\{\left(I-\overline{M}\right)A\right\}^T\right]^{-1}\left\{\left(\overline{M}A\right)^T P_m+V\right\}=P_d$$

となりますので、P_m又はVの変化率が分かれば、P_dの変化率が求められることになります。

（６）均衡価格モデルの特徴と限界

① 与件データ

与件データとして作成するものは、「金額」ではなく、「率」である点に注意してください。また、外生的に与えられる付加価値率は、常に国内のものとなります。

② 現実の価格との乖離

価格分析は、シャドウ・プライス（競争市場で成立すると期待される計算上の均衡価格）的な意味合いが濃く、現実の価格決定メカニズムとは異なる部分も多くあります。

③ 投入物ウェイトの一定

投入物ウェイトを投入係数として固定しており、その投入構造のまま価格変化が波及することを想定しています。つまり、コストプッシュ型の価格波及の分析と言えます。

④ 波及の中断

費用構成の変化が、生産性の向上、利潤の削減、便乗値上げなどにより、製品価格に転嫁されなかったり、過剰に転嫁されたりすることが現実には予想されますが、分析には反映されません。また、公共料金のように政策的見地から価格が設定されている場合は、政府の許認可等が必要となり価格波及しないこともあります。

⑤ 計算上の制限

計算は、切りのいい数字で丸められることなく計算が続けられますので、例えば、雇用者 0.1 人分の波及のような計算もされてしまいます。

⑥ 需給関係の捨象

価格の変化が原材料等の投入の代替を引き起こして（異なる原材料等を使うようになる）、一定であるはずの投入係数を変化させる可能性がありますが、その効果は考慮できません。

⑦ 価格決定メカニズム

このモデルは、付加価値額や原材料等の価格で製品価格が決まるとしていますが、現実には、価格は市場の需給関係で決まることが多くあります。需要が旺盛で供給不足の時期には、価格分析が適さないこともあります。

⑧ 産業相互間に限定

価格の波及は、産業相互間に限定されています。価格の上昇により生計費が上昇し、これが賃金を上昇させる要因になることもあります。このことによって、再び価格の上昇をもたらす可能性があります。

⑨ 作表示との相対的価格変化

作表示と分析時点では、相対的な価格変化が起きているはずですが、その変化は捨象されています。

（７）変動要因分析

産業連関表を用いることにより、2 時点間の生産額等の変化がどの要因によってもたらされたかを把握できます。

例えば、平成 17 年と平成 23 年の表を比較すると、次のようなことが成り立っているはずです。

（平成 23 年と平成 17 年の生産額の違い）
＝（最終需要の変化による変動分）＋（投入係数や移輸入率の変化による変動分）
＋（両者による変動分）

ここで、「投入係数や移輸入率の変化による変動分」というのは、逆行列係数表の変化といいかえることができます。

そこで、もう一度、平成 17 年と平成 23 年の表の関係を整理すると、

（平成 23 年と平成 17 年の生産額の違い）
＝（最終需要の変化による変動分）＋（逆行列係数表の変動分）＋（両者による変動分）

ということになります。この各項目をもう少し詳しく書きますと、

（最終需要の変化による変動分）
＝（平成 17 年の逆行列係数表）×（県産品に対する最終需要の変化）

（逆行列係数表の変動分）＝（逆行列係数表の変化）×（平成 17 年の県産品に対する最終需要）

（両者による変動分）＝（逆行列係数表の変化）×（県産品に対する最終需要の変化）

※ここで、（県産品に対する最終需要の変化分）とは、$\left(I-\overline{M}\right)F_d+E$のことです

この計算を行なうことで、2 時点間の生産額の変動分が、（県産品に対する最終需要の変化）によってもたらされた部分と（逆行列係数表の変化）とその両方によってもたらされた部分に分けることができます。これによって、どの要因で、生産額の変化が起こったのかを把握することができます。

このことを式で表すと次のようになります。

Ｘ：生産額ベクトル、Ｂ：逆行列係数表、Ｄ：県産品に対する最終需要（ΓF_d＋Ｅ）ベクトル（Γ：自給率、F_d：県内最終需要、Ｅ：移輸出）、Δ：増加分

基準年（０）：$X^0=B^0D^0$

比較年（ｔ）：$X^t=B^tD^t=(B^0+\Delta B)(D^0+\Delta D)$

生産変動額：$X^t-X^0=B^tD^t-B^0D^0$

$$=(B^0+\Delta B)(D^0+\Delta D)-B^0D^0$$

$$\Delta X=B^0\Delta D+\Delta B\ D^0+\Delta B\Delta D$$

また、（県産品に対する最終需要の変化）は、最終需要項目間の構成比の変化と各最終需要項目内の部門別構成比に分解することもできます。このように分解すると、（最終需要の変化による変動分）の要因をさらに詳しく分析することができます。

（平成 23 年と平成 17 年の生産額の違い）
＝（最終需要の変化による変動分）＋（逆行列係数表の変動分）＋（両者による変動分）
＝（県産品に対する最終需要の変化全体の変化による変動分）
＋（県産品に対する最終需要の最終需要項目間の構成比の変化による変動分）
＋（県産品に対する最終需要の各最終需要項目内の部門別構成比の変化による変動分）
＋（逆行列係数表の変動分）
＋（上の 4 つの要因のうち 2 つ以上が同時に変化したことによる変動分）

このことを式で表すと次のようになります。

ϕ：県産品に対する最終需要総額（スカラー）、
E：県産品に対する最終需要の最終需要項目間の構成比ベクトル（対角行列化）
C：県産品に対する最終需要の各最終需要項目内の部門別構成比ベクトル
基準年（0）：$D^0 = C^0 E^0 \phi^0$
比較年（t）：$D^t = C^t E^t \phi^t$
生産変動額：

$$
\begin{aligned}
\Delta D &= D^t - D^0 \\
&= C^t E^t \phi^t - C^0 E^0 \phi^0 \\
&= (C^0 + \Delta C)(E^0 + \Delta E)(\phi^0 + \Delta \phi) - C^0 E^0 \phi^0 \\
&= C^0 E^0 \Delta\phi + C^0 \Delta E \phi^0 + \Delta C E^0 \phi^0 \\
&\quad + \Delta C \Delta E \Delta\phi + C^0 \Delta E \Delta\phi + \Delta C E^0 \Delta\phi + \Delta C \Delta E \phi^0
\end{aligned}
$$

これを先ほどの式の ΔD に代入すると、

$\Delta X = B^0 C^0 E^0 \Delta\phi$ ←（県産品に対する最終需要の変化全体の変化による変動分）
$+ B^0 C^0 \Delta E \phi^0$ ←（県産品に対する最終需要の最終需要項目間の構成比の変化による変動分）
$+ B^0 \Delta C E^0 \phi^0$ ←（県産品に対する最終需要の各最終需要項目内の部門別構成比の変化による変動分）
$+ \Delta B D^0$ ←（逆行列係数表の変動分）

$$
\begin{aligned}
&+ B^0(\Delta C \Delta E \Delta\phi + C^0 \Delta E \Delta\phi + \Delta C E^0 \Delta\phi + \Delta C \Delta E \phi^0) \\
&\qquad + \Delta B (C^0 E^0 \Delta\phi + C^0 \Delta E \phi^0 + \Delta C E^0 \phi^0 \\
&\qquad\quad + \Delta C \Delta E \Delta\phi + C^0 \Delta E \Delta\phi + \Delta C E^0 \Delta\phi + \Delta C \Delta E \phi^0)
\end{aligned}
$$

↑
（4 つの要因のうち 2 つ以上が同時に変化したことによる変動分）

（８）消費内生化モデル

均衡産出高モデルでは、通常第 2 次間接効果までを算出しますが、この第 2 次間接効果は、産業連関表内の関係で整合がとれていない部分があるなどの問題もあります。

そこで、家計消費支出を内生化したモデルを考えてみます。

（ア） 均衡産出高モデルの第 2 次間接効果の問題点

① 雇用者所得と家計消費支出の関係

一般的な均衡産出高モデルの第 2 次間接効果では、雇用者所得の一部が家計消費支出によって支出されるとしています。しかし、実際の産業連関表では、次のようになっています。

（単位：百万円）

	全国	埼玉県
雇用者所得	248,421,023	10,147,227
営業余剰	86,806,105	4,668,911
家計消費支出	276,497,315	16,295,240

雇用者所得の一部が、家計消費支出によって支出されるはずなのに、家計消費支出の方が雇用者所得の額を上回っています。

これには、二つ理由が考えられます。

一つは、雇用者所得は、県（国）内概念であるのに対し、家計消費支出は県（国）民概念で計算されていることによります。そのため、埼玉県のように県外で就業する県民が多い県では、県外からの雇用者報酬が表示されていません。この県外からの雇用者報酬は、5 兆円以上にもなり、雇用者所得として表示されている額の半分以上にもなります。しかし、この額を加えても、家計消費支出の額を超えません。全国でも同様です。海外からの所得は、財産所得と雇用者報酬を合わせても、20 兆円にも満たない額です。そのため、雇用者所得と家計消費支出を比べると、やはり、家計消費支出の方が雇用者所得の額を上回ることになります。したがって、この理由のみでは説明できません。

二つ目の理由は、営業余剰には、個人業主の所得が含まれていることによります。農林水産業など、個人業主が多い部門では、かなりの個人所得が含まれていることになります。そのためか、国民経済計算などでは、営業余剰・混合所得として表示されています。

雇用者所得に県外（海外）からの雇用者報酬及び営業余剰を加えた額から、家計消費支出がなされるとすると関係が説明できることになります。

埼玉県では、（県民）所得係数と消費転換係数を算出することにより、この問題点を解消しています。（第３章　４　経済波及効果分析（４）参照）

② 波及効果の算出方法

一般的な均衡産出高モデルでは、第 2 次間接効果は、直接効果＋第１次間接効果に対する所得増加額に対して発生するものとしています。時間的な関係は明確ではない

ものの、実際は、直接または間接効果が発生するたびに第２次間接効果が発生し、それに対してまた間接効果が発生するという過程が繰り返されているはずです。そのような状況が捨象されています。

一般的な均衡産出高モデル

直接効果　→　第１次間接効果　→第２次間接効果

現実の波及

直接効果　＋　直接効果による所得増加による効果

→　第１次間接効果＋第１次間接効果による所得増加による効果

→　第２次間接効果＋第２次間接効果による所得増加による効果　→　以降繰り返し

（イ）問題点の解消方法

① 雇用者所得と家計消費支出の関係

（県内）雇用者所得と家計消費支出の関係ではなく、県民所得と家計消費支出の関係として整理する方法が考えられます。

県民所得は、県内雇用者報酬＋営業余剰・混合所得＋県外からの所得（純）ですので、県民経済計算などから、県外からの所得（純）を求めれば、県民所得と家計消費支出の比率が計算できます。

その額を計算すると次のようになります。

	全国	埼玉県
雇用者所得	248,421,023	10,147,227
営業余剰	86,806,105	4,668,911
県(海)外からの雇用者報酬(純)	130,200	5,724,168
県(海)外からの財産所得(純)	14,544,900	654,222
家計消費支出	276,497,315	16,295,240

それぞれの項目に対する家計消費支出の比率を求めると次のようになります。

	全国	埼玉県
雇用者所得	111%	161%
営業余剰	319%	349%
雇用者所得＋営業余剰	82%	110%
雇用者所得＋営業余剰 ＋県(海)外からの所得(純)	79%	77%

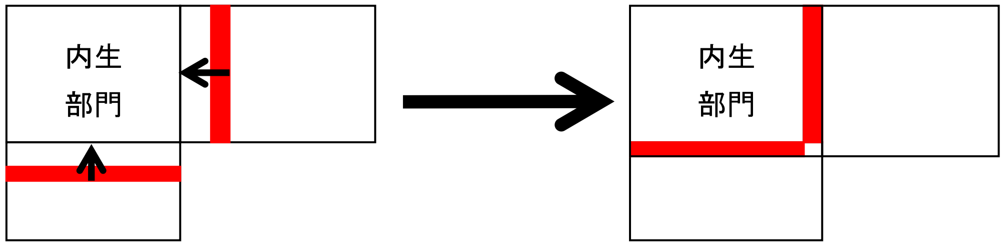
これを見ましても、県民所得（要素費用表示）に対する家計消費支出の関係が、最もあてはまりがよさそうです。この比率（77%、埼玉県）を所得増加のうち消費支出に回る割合とすることがよいことが分かります。

そこで埼玉県では、県民経済計算から、（県民）所得係数と消費転換係数を計算し、分析を行っています。（第３章　４　経済波及効果分析（４）参照）

② 波及効果の算出方法

第２次間接効果を第１次間接効果と同時に計算することによって問題点を解消します。

家計消費支出列と雇用者所得＋営業余剰のうち消費に回る分（①の比率分）の行を内生部門に移し、その産業連関表を用いて波及効果を計算します。これにより、消費に対しても、究極的な間接効果が求められるという長所があります。



（９）雇用表等の利用

（ア）雇用表と生産額の関係

雇用表は、産業連関表の部門に対応する形で作成されています。これは、各部門の生産額のために直接投入された従業者数や雇用者数などを示しています。

従業者数や雇用者数を県内生産額で除して求められる比率に生産誘発額を乗じることで、生産により誘発される従業者数や雇用者数が求められます。

（イ）生産額に含まれる労働力

次に、生産物にどれくらいの労働力が原材料段階から投入されたかを考えてみます。まず、生産物を生産するために直接投入された労働力が考えられます。これは、（ア）で見たように、生産額に対応する雇用表の人数です。しかし、その生産を行なうためには、様々な財・サービスが投入されています。また、その財・サービスを生産するためにも様々な財・サービスが投入されています。このような関係をすべて追っていって生産額に含まれるすべての労働力を計算することができるのでしょうか。順に考えていきます。

（ウ）生産額と直接・間接に含まれる労働力との関係

取引基本表　（単位：億円）

需要（買い手）／供給（売り手）		中間需要 産業Ⅰ	中間需要 産業Ⅱ	最終需要	県内生産額
中間投入	産業Ⅰ	10	20	70	100
	産業Ⅱ	40	40	120	200
粗付加価値		50	140		
県内生産額		100	200		

上のような産業連関表があったとします。

産業Ⅰを縦に見てください。

産業Ⅰを１億円分生産するために、直接・間接に含まれる労働力を e_1 としますと、県内生産額 100 億円の中には、100 e_1 の労働力が直接・間接に含まれていることになります。

同じように考えると、産業Ⅱでは、200e_2の労働力が直接・間接に含まれていることになります。

しかし、産業Ⅰと産業Ⅱの原材料等の中にも、産業Ⅰと産業Ⅱの生産物が含まれています。また、それぞれの粗付加価値の中には、直接投入された労働力が含まれています。

直接投入された労働力をそれぞれ、D_1、D_2とすると、縦の関係は次のようになります。

産業Ⅰ　$10e_1+40e_2+D_1=100e_1$

産業Ⅱ　$20e_1+40e_2+D_2=200e_2$

これを、それぞれの生産額で割ってみると、次のようになります。

産業Ⅰ　$0.1e_1+0.4e_2+d_1=e_1$　　（$d_1=D_1/100$：労働係数等）

産業Ⅱ　$0.1e_1+0.2e_2+d_2=e_2$　　（$d_2=D_2/200$：労働係数等）

この関係を行列で表すと、次のようになります。

$$(e_1 \quad e_2)\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}+(d_1 \quad d_2)=(e_1 \quad e_2)$$

行列部分は投入係数（A）ですので、

$$E=(e_1 \quad e_2) \qquad A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad D=(d_1 \quad d_2)$$

とすると、次のように表すことができます。

$EA+D=E$

$D=E-EA=E(I-A)$

$D(I-A)^{-1}=E$

ということになり、生産額に直接間接に含まれる労働力率は、直接投入される労働力率のベクトルに逆行列を掛けることにより求められることが分かります。

（エ）直接間接に含まれる労働力と実際の労働力の関係

では、直接間接に含まれる労働力とはどのようなものなのでしょうか。

生産額をx_1（産業Ⅰ）、x_2（産業Ⅱ）とし、直接間接に含まれる労働力全体を求めてみます。

$e_1x_1+e_2x_2$　ですので、

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ とすると、

$EX \quad =D(I-A)^{-1}X$

$=D(I-A)^{-1}\cdot(I-A)^{-1}F$

$=D\{(I-A)^{-1}\}^2 \quad F$

となり、間接効果を２重に計算していることが分かります。

つまり、直接間接に含まれる労働力を計算しているので、県内生産額に対する直接労働投入と中間投入に含まれる労働投入の両方を計算していることになります。しかし、中間投入に含まれる労働力は、当然生産額に含まれているので2重に計算をしていることになります。

（オ） 直接間接に含まれる労働力と最終需要との関係

$$X = (I - A)^{-1} F$$

$$D (I - A)^{-1} = E$$ から

実際の労働力は、

$$DX = D (I - A)^{-1} F$$
$$= EF$$

となり、最終需要に直接間接に含まれる労働力を掛けると、全体の労働力を算出できます。

（カ） 移輸入を考慮した場合

移輸入ベクトルを対角行列化した行列をＭとすると、

$$EA - EMA + D = E$$ と表すことができます。

$$E (I - M) A + D = E$$
$$D = E - E (I - M) A$$
$$D = E \{I - (I - M) A\}$$
$$D \{I - (I - M) A\}^{-1} = E$$

となりますので、開放型の逆行列係数表で計算できることになります。

（キ） 他の付帯表への利用

このように、生産物に対して直接投入されるものが対応させられれば、その関係を利用して、直接間接に含まれる投入量を計算することができます。これは、生産額との関係が規定できれば、投入するものだけでなく、生産によって排出されるものも計算できることを示しています。

また、直接投入（排出）量から直接間接に投入（排出）される量を計算しておけば、最終需要額ベクトルから、その最終需要額に対応する投入量が計算できることも示しています。

この考え方を利用すると、例えば、生産額に対応する二酸化炭素排出量が計算できれば、その生産物に含まれる二酸化炭素排出量全体（カーボンフットプリント）を求めたり、最終需要額に対応する二酸化炭素排出量を求めたりすることにより、通常の計算では算出し得ない部分を計算することができます。

（ク） 雇用表等利用の留意点

産業連関分析では、生産活動が増大すれば、それに対応して労働者数も増加することを前提として計算をしています。しかし、現実の社会では、時間外労働の調整など様々な要因によって、必ずしも計算どおりにはいかないことも多いと考えられます。また、人の場合は、端数ということはあり得ませんが、分析の計算では、あまり考慮されません。

また、生産額との関係は、規模や生産性の変化などにより一定しないことも多くあります。

このような問題に留意し、分析を進められるようお願いします。