

## 非線形最小 2 乗法による地盤モデルの最適化

Determination of Optimal Models for Underground  
Structure by Nonlinear Least Squares Methods

松岡 達郎

Tatsuro Matsuoka

### 要 旨

地盤の S 波速度構造の推定に最適化法の適用を試みた。そのために、ガウス・ニュートン法系の非線形最小 2 乗法(縮小因子による安定化法, マルカート法)のアルゴリズムを用いた計算機プログラムを作成した。

モデル関数の偏微分行列を解析的に計算するなど精度向上の配慮を加え、数多くの層構造に対する数値シミュレーションを実施した。その結果、ほとんどの場合にマルカート法が最適解に到達し、この問題についての実用性が確かめられた。

### 1 はじめに

振動公害や地震動被害を予測するには、対象とする地盤の地下構造を知る必要がある。地下構造が明らかになれば、基盤から地表までの地盤を系とした図 1 のような入出力モデル(以下、地盤モデルという)を想定し、例えば地表の地震動は、基盤からの入力に対する系の応答として容易に計算することができる。

計算の確度は系の特性関数に依存するが、この関数は一般に、地盤を構成する各地層の厚さや物性定数(密度、弾性波速度など)をパラメタとする。したがって、「地下構造を知る」とは、結局、これらパラメタをどれだけ適切に設定できるかということに他ならない。

パラメタに推定値を用いる場合はもとより、実測値が存在する地盤であっても、層の分割の仕方や測定あるいは推定誤差により、地盤モデルの応答(計算値)は必ずしも観測結果に整合するとは限らない。そのため、時に観測値に合うまでパラメタの修正を繰り返す

ことがある。しかし、このような作業の結果、観測値を説明する「より良い」地盤モデルを見いだすことが可能であっても、それが「最適な」モデルである保証はない。

そこで、近年、地盤モデルの構造(すなわち、パラメタ)の決定に最適化法を用いる試みが行われるようになってきた<sup>1),2)</sup>。最適化法はある問題の最適解を導く計算手法の総称であるが、ここでは因果関係として捉える現象について、結果(データ)を既知としてそれを生み出す最も確からしい原因(モデル)を推定しようとする、いわゆる逆問題の解法手段を指す(前述のように、モデルを定めてデータを求める問題を順問題という)。

筆者は、最近、図 1 の系の入出力比に相当する観測値が得られた場合に、それを説明する最適な地盤モデルの構造を、最適化法の一つである非線形最小 2 乗法によって推定する計算機プログラムを作成した。本稿はプログラムの計算方法及びシミュレーションデータを用いた計算例を紹介するものである。

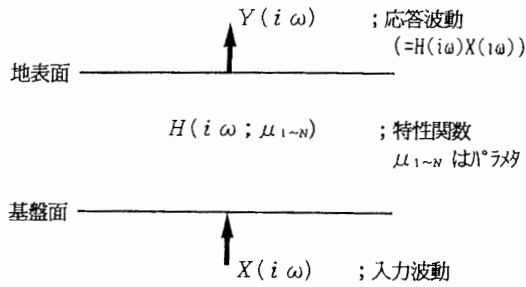


図1 地盤の入出力モデル

## 2 計算方法

### 2・1 地盤のモデル関数

図2のような成層構造をもつ地盤の最下層（第N層，基盤）から，単位の振幅をもつホワイトなSH波が垂直に入射したときの地表の応答振幅 $G(i\omega)$ は，SH波重複反射理論により以下のように表される。

$$G(i\omega) = \frac{2i\rho_N V_N \gamma_N^{-1} \delta_N \omega}{A_{21} + i\rho_N V_N \gamma_N^{-1} \delta_N \omega A_{11}} \quad (1)$$

ただし， $\omega$ は角周波数， $A_{11}$ ， $A_{21}$ は次式に示される第K層の層マトリクス

$$a_K = \begin{bmatrix} \cos P_K & C_K^{-1} \sin P_K \\ -C_K \sin P_K & \cos P_K \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに

$$C_K = \rho_K V_K \gamma_K^{-1} \delta_K \omega$$

$$P_K = \omega h_K / V_K \gamma_K^{-1} \delta_K$$

$$\delta_K = 1 + i/2 Q_K$$

$$\gamma_K = (1 + Q_K^{-2})^{1/4}$$

$$h_K ; \text{層の厚さ [m]}$$

$$\rho_K ; \text{土の密度 [ton/m}^3\text{]}$$

$$Q_K ; \text{無次元減衰量 (Q値)}$$

$$V_K ; \text{S波速度 [m/sec]}$$

の第N-1層から第1層（表層）までの積

$$A = a_{N-1} \cdot a_{N-2} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

の第1列ベクトルの成分である。

この $G(i\omega)$ は単位入力による応答であるので，図1の入出力系の特性関数（伝達関数）に相当し，入射波のパワースペクトル $P_X(\omega)$ と応答波のパワースペクトル $P_Y(\omega)$ を用いて，

$$|G(i\omega)| = g(\omega) = P_Y(\omega) / P_X(\omega) \quad (4)$$

が成立する。 $g(\omega)$ は伝達関数 $G(i\omega)$ の振幅特性で，

No.	層厚	密度	Q値	S波速度
1	$h_1$	$\rho_1$	$Q_1$	$V_1$
2	$h_2$	$\rho_2$	$Q_2$	$V_2$
⋮				
K	$h_K$	$\rho_K$	$Q_K$	$V_K$
⋮				
N-1	$h_{N-1}$	$\rho_{N-1}$	$Q_{N-1}$	$V_{N-1}$
N	-	$\rho_N$	$Q_N$	$V_N$

図2 波動の重複反射計算に用いる地盤モデル

一般に地盤の増幅特性と呼ばれている。式(1)~(4)から分かるように， $g(\omega)$ は各層の厚さ $h_K$  ( $K=1 \sim N-1$ )及び物性定数 $\rho_K$ ， $V_K$ ， $Q_K$  ( $K=1 \sim N$ )をパラメタとする $\omega$ の実関数で，これを地盤モデルの関数表現（モデル関数）とする。

そこで，問題の所在は式(4)の右辺の量が何らかの観測値（例えば，基盤と地表の同時地震観測など）として与えられたとき， $g(\omega)$ の構造を定める各パラメタを観測値に最も合うように定めることにある。

### 2・2 非線形最小2乗法<sup>3)</sup>

最適化問題は常に関数の最小化に帰着する。このような問題の解法の一つに，あるパラメタの値 $x$ （ここでは $h_K$ ， $\rho_K$ ， $V_K$ などを要素とするベクトル変数）のときの計算値 $g(\omega; x)$ と観測値 $y(\omega)$ の重み $W(\omega)$ つき残差2乗和（以下，単に残差という）

$$E(x) = \sum_{j=1}^m S^2(\omega_j; x) W(\omega_j) \quad (5)$$

$$S(\omega_j; x) = g(\omega_j; x) - y(\omega_j)$$

$$j; \text{周波数分割番号 (} m \text{は最大個数)}$$

が最小となる $x$ を求める方法（最小2乗法）がある。

ただし，この問題では式(1)~(4)から明らかにモデル関数 $g(\omega; x)$ が $x$ について非線形であるので，解を一意に定めることが不可能である。そこで，モデル関数を線形近似して最小2乗解を反復改良する方法（非線形最小2乗法）が用いられる。

すなわち，式(5)で表される $E(x)$ が， $x$ のある初期値 $x_0$ から $\Delta x$ だけ移動したときに最小値をとると仮定すれば， $\Delta x$ を未知数とする連立方程式

$$(B^t B) \Delta x = -B^t S \quad (6)$$

$$B = [B_{jK}], B_{jK} = \partial S(\omega_j; x) / \partial x_K$$

$$S = [S_1, \dots, S_m]^t$$

$K$ ; パラメタ番号

が成立する (簡単のために  $W(\omega_j) \equiv 1$  とした)。

そこで, 式(6) (これを正規方程式という) を  $\Delta x$  について解き, 新しいパラメタ

$$x = x_0 + \Delta x \quad (7)$$

を求める操作を反復し, ある収束条件を満たした  $x$  を最適解とみなす (ガウス・ニュートン法)。

しかし, ガウス・ニュートン法はモデル関数の非線形性が強い場合に, 解が不安定になる欠点がある。このため様々な改良が加えられているが, 本プログラムでは次の 2 種類の改良法を用いた。

- 縮小因子による安定化ガウス・ニュートン法

縮小因子  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) を導入し, 式(7)の代わりに

$$x = x_0 + \alpha \Delta x \quad (8)$$

としてパラメタの変化を緩和する。 $\alpha$  を十分小さくとれば反復に伴う残差の減少が見込まれる。

- マルカート法

正規方程式の係数行列  $B^t B$  に対角付加項を設けた次式

$$(B^t B + \lambda D) \Delta x = -B^t S, \quad 0 \leq \lambda \quad (9)$$

$$D = I + \text{diag}(B^t B)$$

ここに

$I$ ; 単位行列

$\text{diag}(M)$ ; 行列  $M$  の対角成分からなる対角行列

により  $\Delta x$  を解く。この方法は  $\lambda$  を十分大きくとれば残差が最大となる方向 (最急降下方向) に  $\Delta x$  を求める。

$\Delta x$  の解法は正規方程式を例えば

$$\Delta x = -(B^t B)^{-1} B^t S \quad (10)$$

のように直接解く方法もあるが, 係数行列が時に悪条件となり, 逆行列演算の精度が低下する場合がある。そこで本プログラムは逆行列演算を介さない修正グラム・シュミット法<sup>4)</sup>を用いている。

なお, 今回用いたガウス・ニュートン法系の非線形最小 2 乗法について, 概略の計算フローを図 3 に示す。

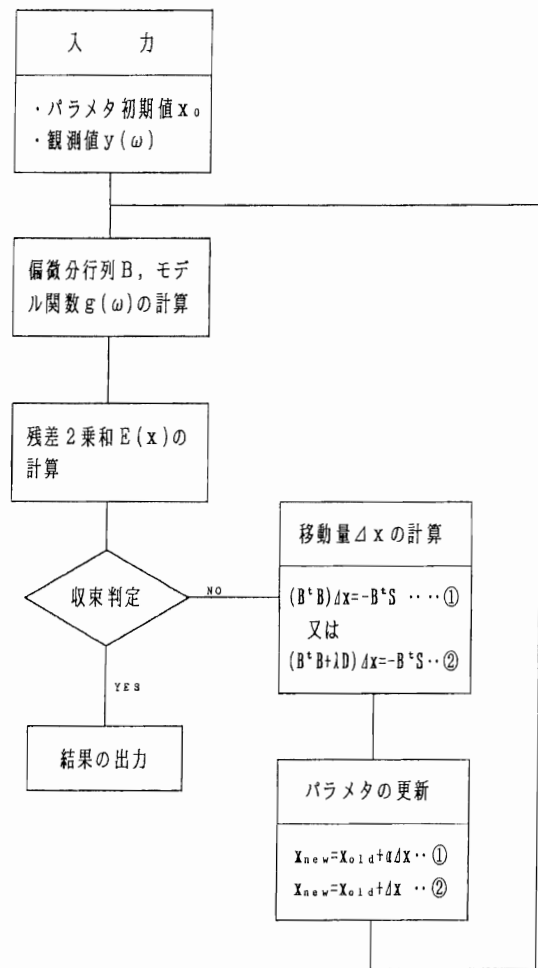


図 3 ガウス・ニュートン法系の計算の流れ

### 2・3 変数パラメタの設定

最適化を行う際に地盤モデルのすべてのパラメタを変数として取り扱うことは, 計算量が膨大になるばかりか結果の信頼性がそれによって増加するわけでもない。現実的には対象地盤に関する情報などをもとに, 可能な限り変数としてのパラメタを減らした上で計算することが得策である。

そのため, 類似又は近傍地盤のボーリング資料等をもとに, まず層厚  $h_K$  を層数とともにあらかじめ初期構造として決定しておく。さらに, 物性定数のうち密度  $\rho_K$  は増幅特性  $g(\omega)$  に与える影響 (感度) が小さいので, 土質ごとの標準的な値を採用する。また, 減衰量  $Q_K$  は増幅特性のピークの高さに対する感度が大きいものの, 通常の堆積盆地などでは経験的に 5~10 程度の値に収まることが知られている。したがって, これらのパラメタは一括して定数扱いとすることが可能である。

一方, S 波速度  $V_K$  は増幅特性のスペクトル形状を

決定する重要な量で、堆積盆地ではおよそ50~1000 m/s程度の広い範囲の値をとり得る。そこで、本プログラムにおいてはS波速度のみを変数パラメータとして最適化を行う。これによって計算された値が不適切な場合（既往の測定値と大きく異なるか、残差が大きいなど）は、初期構造の層厚、層数などを変更して再計算する。

なお、変数パラメータ（S波速度）の初期値の選び方は重要で、最適値とかけ離れた値を設定すると反復回数が増大するばかりか、残差の局所的な最小値に落ち込む場合がある。したがって、例えば次のような土質指標（N値  $N_v$ 、深度  $H_D$  など）からの推定式<sup>5)</sup>

$$V = 68.79 N_v^{0.171} H_D^{0.199} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.303 \end{bmatrix} \begin{matrix} E \\ F \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.086 \\ 1.066 \\ 1.135 \\ 1.153 \\ 1.448 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ F \end{matrix} \quad (11)$$

ただし

$$\begin{bmatrix} \text{沖積} \\ \text{洪積} \end{bmatrix} \begin{matrix} E, \\ \\ \\ \\ \\ F \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{粘土} \\ \text{細砂} \\ \text{中砂} \\ \text{粗砂} \\ \text{砂レキ} \\ \text{レキ} \end{bmatrix}$$

などを用い、現実に近い値を設定することが望ましい。

## 2・4 偏微分行列 $[B_{j,k}]$ の導出

非線形最小2乗法の精度は、式(6)、(9)などの正規方程式に現れる偏微分行列  $B = [B_{j,k}]$  の計算方法にも支配される。一般に、差分近似を用いる方法がステップ数も少なく簡便であるが、可能なら解析的に計算したほうが高い精度を期待できる。地盤モデルの推定に非線形最小2乗法を適用したこれまでの報告<sup>1)</sup>では差分近似が使われているので、ここでは解析表現を検討する。

先に、変数パラメータをS波速度のみとしたので  $B_{j,k}$  を新たに

$$\begin{aligned} B_{j,k} &= \partial S(\omega_j; V) / \partial V_k & (12) \\ S(\omega_j; V) &= \partial(\omega_j; V) - y(\omega_j) \\ V &= [V_1, \dots, V_N]^t \\ K &= 1 \sim N (\text{層数, したがってパラメータ数}) \end{aligned}$$

と表記する。したがって、 $B_{j,k}$ は

$$\begin{aligned} B_{j,k} &= \frac{\partial}{\partial V_k} [g(\omega_j; V) - y(\omega_j)] \\ &= \frac{\partial g(\omega_j; V)}{\partial V_k} \end{aligned} \quad (13)$$

のようにモデル関数  $g(\omega; V)$  のS波速度についての偏微係数として表される。

$g(\omega; V)$  は式(4)に示すように伝達関数  $G(i\omega)$  の振幅特性であり、 $G(i\omega)$  の関数形は式(1)~(3)で与えられているので、計算の過程は付録とし結果だけを示せば以下のようなになる（サフィックス  $j$  を省略）。

$$\frac{\partial g}{\partial V_k} = \frac{1}{4} g^3 \left[ R \frac{\partial R}{\partial V_k} + I \frac{\partial I}{\partial V_k} \right] \quad (14)$$

$$R = R(\omega; V) = \text{Real} [A_{11} + \beta A_{21}]$$

$$I = I(\omega; V) = \text{Imag} [A_{11} + \beta A_{21}]$$

$$\frac{\partial R}{\partial V_k} = \begin{cases} \text{Real} \left[ \frac{\partial A_{11}}{\partial V_k} + \beta \frac{\partial A_{21}}{\partial V_k} \right], & k \neq N \\ -\text{Real} [\beta A_{21} V_N^{-1}], & k = N \end{cases}$$

$$\frac{\partial I}{\partial V_k} = \begin{cases} \text{Imag} \left[ \frac{\partial A_{11}}{\partial V_k} + \beta \frac{\partial A_{21}}{\partial V_k} \right], & k \neq N \\ -\text{Imag} [\beta A_{21} V_N^{-1}], & k = N \end{cases}$$

$$\beta = 1 / i \rho_N V_N \tau_N^{-1} \delta_N \omega$$

結局、偏微分行列の計算には

$$A_{11}, A_{21}, \frac{\partial A_{11}}{\partial V_k}, \frac{\partial A_{21}}{\partial V_k}$$

の諸量が必要になるが、これらは式(2)、(3)から求めることができる。

## 2・5 収束判定

計算の精度を最後に決定するのが収束判定条件（反復の打ち切り規準）で、条件が緩すぎれば最適解に到達する以前に計算が打ち切られる。一方、条件を厳しくすれば、解の変化が僅少であっても反復が続行され、計算時間が膨大になる。

本プログラムの収束判定については、成書<sup>3)</sup>を参考に次のような条件設定とした。すなわち、残差の減少量をもとに

$$(E(x_{old}) - E(x_{new})) / E(x_{old}) \leq 10^{-4} \quad (15)$$

を満たせば反復打ち切りとする。ただし、計算機の丸め誤差により、残差が前回よりごく僅かに増加する ( $E(x_{old}) - E(x_{new})$  が負になる) 場合もあるため、

$$E(x_{new}) \leq (1 + 10^{-4}) E(x_{old}) \quad (16)$$

を満たせば残差が減少した場合と同様に扱う。

### 3 計算例

プログラムの計算性能を確認するために、数値シミュレーションを実施した。

計算に用いる観測値  $y(\omega)$  は、各層の厚さと物性定数を適宜与えて計算される地盤の増幅特性  $g(\omega)$  (以下、真値モデル) に、標準偏差0.1の正規乱数を加えたものとした。

そこで、適当な S 波速度の値を初期値に設定したときの増幅特性 (以下、初期値モデル) から出発し、観測値との残差を最小にする値 (以下、最適値) を求める。

層構造や初期値の与え方を様々変えて得られた結果の中から、いくつかの代表的な計算例を示す。

#### (1) 初期値モデルが観測値に近い場合

表 1 のような 4 層構造において、観測値に近い初期値モデルから出発した場合の計算例である。そのため、S 波速度の初期値を各層とも一律に真値の 20% 増とした。

表 1 パラメータ設定値及び計算結果

層番号	層厚 h (m)	密度 $\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	減衰 Q	S 波速度 V (m/s)		
				真値	初期値	最適値
1	4	1.6	10	90	108	90.2
2	3	1.8	10	250	300	244.4
3	10	1.6	10	160	192	160.3
4	—	2.2	10	350	420	347.1

図 4 のドットが作成された観測値、点線が初期値モデルである。S 波速度の小幅な増加は、増幅特性をわずかに高周波側にシフトさせるだけであり、観測値とモデルは類似したスペクトル形状になる。

図 5 に反復回ごとの残差の変化を示したが、安定化ガウス・ニュートン法 (以下、安定化 GN 法) 及びマルカート法とも順調に残差が減少し収束する。ただし、安定化 GN 法のほうが若干遠回りし反復回数も多くなる (マルカート法 5 回、安定化 GN 法 7 回)。

得られた最適値は真値に極めて近く (表 1)、最適値に基づく増幅特性 (図 4 の実線、以下、最適値モデル) も、観測値の良好なカーブフィットになっていることが分かる。

なお、最適値が真値に完全に一致しないのは観測値の作成に正規乱数を用いたためで、これがなければ (真値モデルをそのまま観測値とすれば)、最適値は真値に等しくなり最終残差も完全に 0 になる。

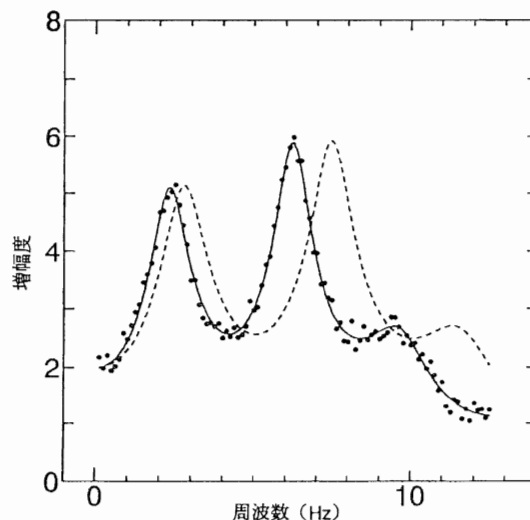


図 4 計算例(1); 最適値 (実線), 初期値 (点線), 観測値 (ドット)

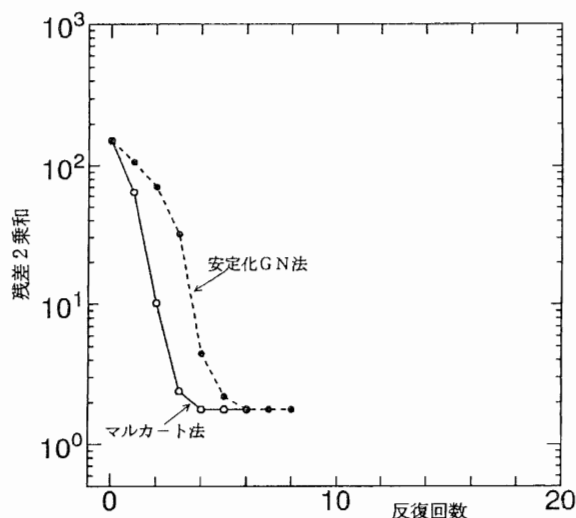


図 5 残差 2 乗和の変化(1)

#### (2) 初期値モデルが観測値と大きく異なる場合

(1) と同じ構造について、S 波速度の初期値を変えて観測値と大きく異なる初期値モデルを与えた場合である。地盤の増幅特性は、一般に表層付近の S 波速度比に強く支配されるため、特に第 1 層と第 2 層の速度比

が真値に比べて大きくなるよう設定した。

図6の点線は初期値モデルであるが、ピークの高さや位置並びにピークの数などで観測値とかけ離れたスペクトル形状となっている。

計算の結果はマルカート法のみ観測値を説明する最適値モデル(図6, 実線)を与えた。すなわち, 図7に示すようにマルカート法が順調に残差を減少させ反復10回で収束したのに対し, 安定化GN法では反復19回以降で発散(残差が増加)し計算打ち切りとなった。

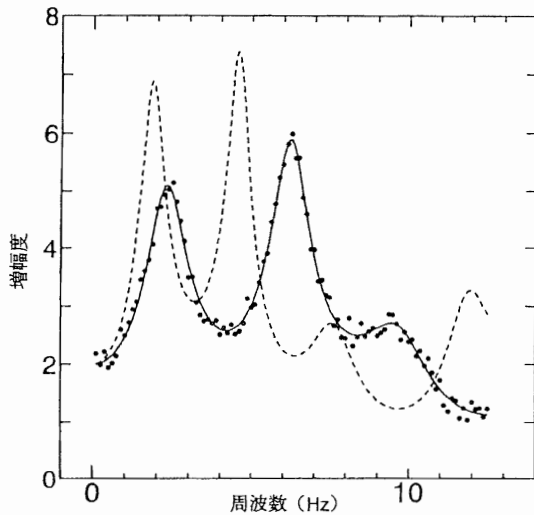


図6 計算例(2); 最適値(実線), 初期値(点線), 観測値(ドット)

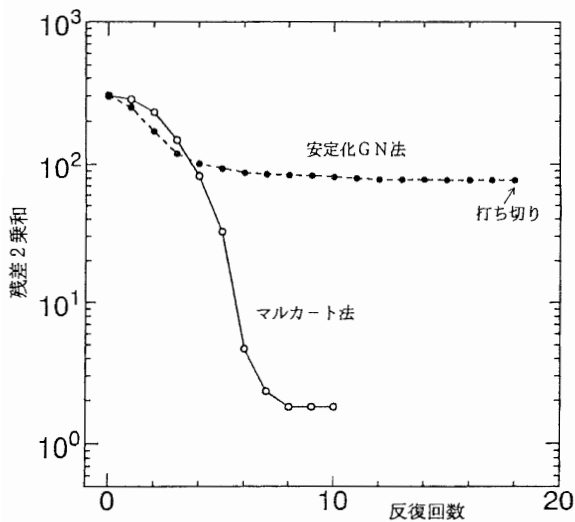


図7 残差2乗和の変化(2)

### (3) 層数(パラメタ数)が多い場合

(1), (2)は層数の少ない場合で, 初期値の与え方も必ずしも現実的でない。ここではプログラムの実際の使用方法を想定した計算例を示す。対象は, ボーリング

調査及びS波速度測定結果から, 表2のように構造が明らかな実在の地盤(8層構造)である。

観測値の作成に必要なS波速度の値として表の実測値(真値とする)を使用した。また, 同じ表のN値や深度などの土質指標を用いて, 式(11)により推定値を算出し, これを初期値に設定した。

この推定値は実測値に対し, 例えば第3層で100%近く異なるなど層ごとの相違が目立つが, 大局的な傾向(第1~4層の低速度群と第5~8層の高速度群)はほぼ等しいといえる。したがって, 図8に示した初期値モデル(点線)は観測値(ドット)に近く, 初期値の設定はおおむね適切であると考えられる。

計算結果は, しかしながら, (2)と同様に安定化GN法が発散し, マルカート法のみ最適値を得ることができた(図8の実線に最適値モデルを示す)。さらに,

表2 地盤の土質資料とS波速度

No.	深度(m)	土質	N値	S波速度V(m/s)		
				実測値(真値)	推定値(初期値)	最適値
1	0-1	埋土	10	130	102	125.4
2	1-5	粘土	2-4	90	103	90.2
3	5-7	腐植土	3	60	119	59.1
4	7-13	沖積粘土	0-1	110	96	110.3
5	13-24	細砂	30-50	310	340	306.6
6	24-30	沖積粘土	10-20	240	274	234.5
7	30-39	中砂	50<	300	377	300.0
8	39-	レキ	50<	410	525	412.8

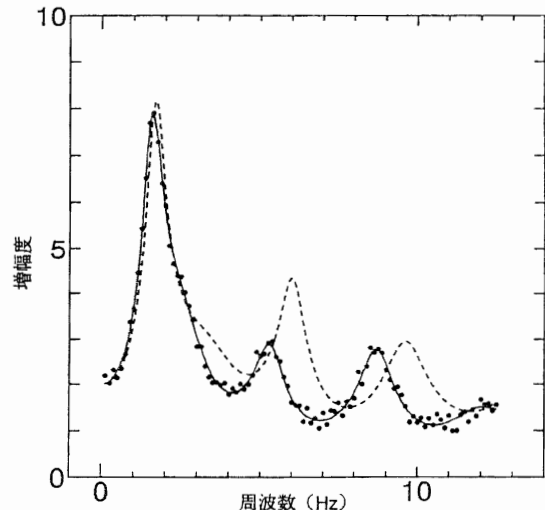


図8 計算例(3); 最適値(実線), 初期値(点線), 観測値(ドット)

マルカート法も反復回数が43回と前2例に比べて大幅に増えた。一般に、パラメタ数の増加は残差の局所的な最小点の増加をもたらす可能性があり、最適値の探索は困難になるが、この計算例にもそれが表れたものと思われる。

これにより、パラメタ数はある程度制限される可能性もあるが、その上限については、初期値の与え方などによって条件が複雑になるため、確認していない。しかしながら、現実的には地下構造を必要以上に細分化してもモデルの精度が高くなる保証はなく、実用上はたかだか10層以内（浅層構造では5～6層以内）を考えればよい。

したがって、この事例でマルカート法が成功したことは、実地盤への適用の可能性を示したものと考えられる。

#### 4 あとがき

非線形最小2乗法の計算手段として広く利用されている安定化ガウス・ニュートン法及びマルカート法を用いて、地盤の増幅特性を表す観測値からS波速度の最適構造を推定するプログラムを作成した。

構造の異なる多数の地盤モデルについて、シミュレーションデータを用いた計算を行った結果、

① この問題については、安定化ガウス・ニュートン法の適用範囲が意外に狭く、層数(パラメタ数)の少ない構造で初期値が真値に近い場合を除けば最適値を得ることが困難である。

② それに対して、マルカート法はほとんどの場合順調に最適値を探索する。ただし、パラメタ数が多い場合、初期値が真値からかけ離れている場合に反復回数が増える

などのことが分かった。

このような結果は、他の物理現象や曲線の当てはめ問題についての多くの適用事例に共通する傾向で、特にモデル関数の非線形性が強い場合に顕著である。今回の計算事例から、地盤のモデル関数も強い非線形性を示すものと考えられるが、少なくとも実用上の範囲でマルカート法が使えることが確かめられた。

なお、本プログラムの反復1回に要する計算時間は、例えば10層モデルで約50秒であるが、このうち偏微分行列の演算に45秒程度費やしている(NEC PC-9821 As/U2, Pro-FORTRAN 使用)。そのため、今後は偏微分行列演算の高速化が課題となろう。

筆者ら<sup>6)</sup>は、現在、地表の微動を解析して地盤の増幅特性に調和する観測値を得る手法を開発しつつある。したがって、この手法が確立すれば、今回作成したプログラムを用いて、地表観測のみによって地下のS波速度構造を推定することが可能になるものと思われる。

#### 文 献

- 1) 太田 裕：地震工学への最適化法の適用，建築学会論文報告集，**229**，35-41，1975.
- 2) 山崎謙介・栗田勝美：シムプレックス法による地盤構成の最適モデル，物理探査学会第89回学術講演論文集，53-54，1993.
- 3) 以下の成書に詳しい
  - J. コワリック他：非線形最適化問題，培風館，1970.
  - L. C. W. ディクソン：非線形最適化計算法，培風館，1974.
  - 中川 徹・小柳義夫：最小2乗法による実験データ解析，東京大学出版会，1982.
- 4) 渡辺 力ら：Fortran 77による数値計算ソフトウェア，丸善，1989.
- 5) 太田 裕・後藤典俊：S波速度を他の土質的指標から推定する試み，物理探査，**29**，251-261，1976.
- 6) 毎熊輝記・松岡達郎・梅沢夏実：常時微動は地盤特性をどのように表すか，物理探査学会第89回学術講演論文集，55-61，1993.

#### 付録 偏微分行列の解析表現(式(14)の導出)

【 $K=1 \sim N-1$ の場合】

式(1)の右辺の分母・子に  $\beta = 1 / i \rho_N V_N \tau_N^{-1} \delta_N \omega$  を乗ずると

$$G(i\omega; V) = \frac{2}{A_{11} + \beta A_{21}} \quad (A1)$$

そこで、分母の実部、虚部を各々  $R(\omega; V)$ ， $I(\omega; V)$ ，すなわち

$$\begin{aligned} R(\omega; V) &= \text{Real} [A_{11} + \beta A_{21}] \\ I(\omega; V) &= \text{Imag} [A_{11} + \beta A_{21}] \end{aligned} \quad (A2)$$

とすれば

$$G(i\omega; V) = \frac{2}{R(\omega; V) + iI(\omega; V)} \quad (A3)$$

したがって

$$g(\omega; V) = |G(i\omega; V)|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{R^2(\omega; V) + I^2(\omega; V)}} \quad (\text{A4})$$

これにより, S波速度  $V_K$  についての偏微係数は

$$\frac{\partial g}{\partial V_K} = \frac{\partial}{\partial V_K} [2(R^2 + I^2)^{-1/2}]$$

$$= -2(R^2 + I^2)^{-3/2} \left( R \frac{\partial R}{\partial V_K} + I \frac{\partial I}{\partial V_K} \right)$$

(A5)

であるが, 式 (A4) から  $(R^2 + I^2)^{-3/2} = (1/2 \cdot g)^3$  であるので, これを (A5) に代入し, 式(14)を得る。

**【 $K = N$ の場合】**

この場合,  $A_{11}$ ,  $A_{21}$ はともに  $V_N$  の関数にはならないので, 式 (A1) を

$$G(i\omega; V) = \frac{2}{A_{11} + \beta' A_{21} V_N^{-1}}, \quad \beta' = \beta V_N$$

(A6)

と書き換え, 分母の実部, 虚部も同様に  $\beta'$ を用いて表せば

$$R(\omega; V) = \text{Real} [A_{11} + \beta' A_{21} V_N^{-1}]$$

$$I(\omega; V) = \text{Imag} [A_{11} + \beta' A_{21} V_N^{-1}] \quad (\text{A7})$$

したがって

$$\frac{\partial R}{\partial V_N} = \text{Real} [-\beta' A_{21} V_N^{-2}]$$

$$= -\text{Real} [\beta A_{21} V_N^{-1}]$$

$$\frac{\partial I}{\partial V_N} = \text{Imag} [-\beta' A_{21} V_N^{-2}]$$

$$= -\text{Imag} [\beta A_{21} V_N^{-1}] \quad (\text{A8})$$

が得られる。これらを用いれば  $K = 1 \sim N-1$  の場合と同様に式(14)を導くことができる。